Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 12 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(3 Punkte)* Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen, die denselben Grenzwert $\ell \in \mathbb{R}$ haben, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Nun sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere reelle Folge, mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeige: Dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.

Lösung. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_1\,, \qquad |c_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_2\,.$$

Für $n \geq \max(N_1, N_2)$ gilt damit sogar

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon.$$

Wir schlussfolgern, dass

$$|b_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq \max(N_1, N_2).$$

Damit ist die Aussage gezeigt. ■

Aufgabe 2: *(3 Punkte)* Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{K}$. Zeige, dass $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ konvergiert mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Lösung. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt dann

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

und deshalb $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. ■

Aufgabe 3: *(4 Punkte)* Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen $n_k \in \mathbb{N}$, so dass $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist mit $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. Zeige, dass dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als ganze Folge konvergiert und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Lösung. Nach Voraussetzung wissen wir, dass für $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N$$

und

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N.$$

Sei nun konkret $m = n_\ell$ für ein $\ell \geq N$. Dann gilt für $n \geq N$, dass

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_\ell}| + |a_{n_\ell} - a| < \varepsilon.$$

Da ε beliebig gewählt war, zeigt dies, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. ■